# Về bài thi Giữa kỳ 25%

| | |
|---|---|
| Ngày thi: | thứ sáu, ngày 28 / 11 / 2025, lúc 09 : 00 sáng |
| Phòng thi: | xem trên trang web của trường |
| Thời lượng: | 60 phút |
| Nội dung: | Chương 1 (tích phân trên hình hộp) đến Chương 5 (công thức đổi biến cho hàm 2 biến, bao gồm tọa độ cực). |

**Sinh viên được mang một tài liệu viết tay trên một tờ giấy A4 và được sử dụng các máy tính theo quy định của kì thi tốt nghiệp trung học.**

# Công thức đổi biến: tọa độ cực và tọa độ cầu, định thức và thể tích

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 13 tháng 11 năm 2025

# Nhắc lại: Công thức đổi biến

Công thức đổi biến tổng quát:

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det \varphi'|$$

được thỏa dưới những giả thiết: $A$ là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $\varphi$ là một phép đổi biến từ $A$ lên $\varphi(A)$, $A$ và $\varphi(A)$ có thể tích, $f$ và $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ khả tích.

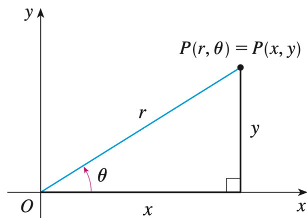
Với phép đổi biến $(u, v) \mapsto (x, y)$ mang tập $A$ thành tập $B$, người ta thường dùng ký hiệu

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

và tích phân trở thành

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

# Nhắc lại: Tọa độ cực (polar coordinate system)




Một điểm $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực $(r, \theta)$, với

- $r$ là khoảng cách từ $O$ tới $P$; và
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ là góc từ vectơ $\langle 1, 0 \rangle$ (tia $Ox$) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$.

Do đó, $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tuy nhiên, tại một điểm trên tia Ox thì $\theta = 0$ hay $\theta = 2\pi$. Mặt khác, tại gốc tọa độ O thì $r = 0$ còn $\theta$ có thể là bất kỳ giá trị nào.

Do đó, $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ không là song ánh và không liên tục trên Ox.

Ta hạn chế miền xác định là $\mathbb{R}^2$ bỏ đi tia Ox. Khi đó, ánh xạ ngược từ tọa độ cực sang tọa độ Euclid là:

$$\begin{aligned} (0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0)\,|\,x\geq 0\} \\ (r,\theta) &\mapsto (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned}$$

Ta cũng có mối liên hệ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ và $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

# Tích phân trong tọa độ cực

Xét tích phân của hàm hai biến $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, trong đó $(x,y)$ thuộc về miền $R$. Khi ta đổi tọa độ từ $(x,y)$ sang $(r,\theta)$ thì miền $R$ được viết lại theo tọa độ cực

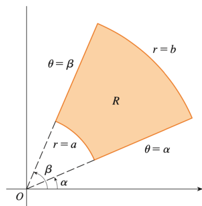
$$R = \{(r,\theta) \mid \dots\}.$$

Với $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, và $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, thì

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r > 0,$$

nên đây là một phép đổi biến. Một cách hình thức, ta viết:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$




Hình: Hình chữ nhật trong tọa độ cực

## Định lý

*Giả sử hàm $f(r,\theta)$ liên tục trên một hình chữ nhật $R$ trong tọa độ cực:*

$$R = \{(r,\theta) \,|\, 0 \le a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$$

*với $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, thì ta có đẳng thức tích phân:*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

# Ví dụ: Tích phân trên hình tròn

Gọi $B'(O, R)$ là hình tròn đóng tâm $O$, bán kính $R$. Để áp dụng công thức đổi biến, ta dùng phép vi đồng phôi $\varphi$ từ hình chữ nhật mở $(0, R) \times (0, 2\pi)$ sang miền

$$D = B'(O, R) \text{ bỏ đi đường tròn biên và tia } Ox.$$

Cho $f$ khả tích trên $B'(O, R)$. Vì tập bỏ đi có diện tích không nên không ảnh hưởng đến tích phân.

Khi đó,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{B'(O,R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{(0,R)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Như vậy, khi $f \equiv 1$, ta tính được diện tích hình tròn:

$$|B'(O,R)| = \iint\limits_{B'(O,R)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \pi R^2.$$

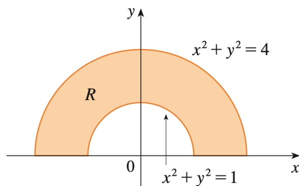


# Ví dụ

*Tính tích phân*

$$\iint_R (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}A,$$

*trong đó $R$ là miền nửa trên của mặt phẳng bị chặn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.*




(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Miền $R$ có thể được biểu diễn bởi:

$$R = \{(x, y) \,|\, y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

và trong tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ trở thành:

$$R = \{(r, \theta) \,|\, 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

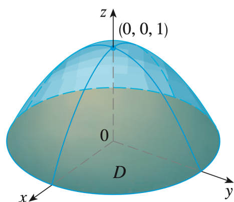
Tích phân đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_0^\pi \int_1^2 \left(3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 3r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \int_1^2 4r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_1^2 3r^2\,\mathrm{d}r + \int_0^\pi \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_1^2 4r^3\,\mathrm{d}r \\
&= 0 + \frac{15}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{15}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{15\pi}{2}.
\end{aligned}$$



# Ví dụ

*Tìm thể tích của khối rắn bị chặn bởi mặt phẳng* $z = 0$ *và paraboloid* $z = 1 - x^2 - y^2$.




Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ bị chặn bởi mặt phẳng $z = 0$ thì phương trình của đường giao cắt là:

$$0 = 1 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1,$$

nghĩa là một đường tròn tâm O bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy.

Nếu $D$ là hình tròn tâm O bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy, thì thể tích cần tính được cho bởi tích phân của hàm số $z = 1 - x^2 - y^2$ trên miền $D$:

$$\iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}A.$$

Sử dụng tọa độ cực $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, miền $D$ được viết thành:

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

và ta có:

$$\iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

<u>Ghi chú</u>: Nếu không sử dụng tọa độ cực thì tích phân cần tính là:

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)^{3/2}\,\mathrm{d}x,$$

và việc tìm nguyên hàm của $(1 - x^2)^{3/2}$ là không dễ dàng.

# Hệ tọa độ trụ

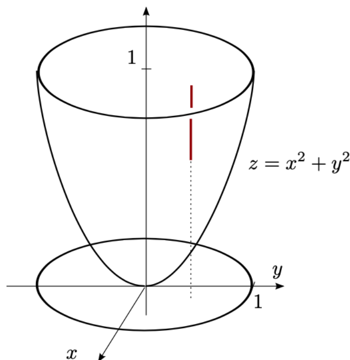
Ta có thể thực hiện phép đổi biến: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bằng cách dùng tọa độ cực $(r, \theta)$ để miêu tả $(x, y)$ và giữ nguyên $z$.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, z = z.$$

Ta gọi $(r, \theta, z)$ là hệ tọa độ trụ.

# Ví dụ

*Cho $E$ là khối được bao bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$. Tính* $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$.




Cách 1: Chặn của $z$ phụ thuộc vào $x$ và $y$.

Ta xem $E$ là một khối đơn giản theo chiều trục $z$, nằm trên mặt phẳng $z = x^2 + y^2$ và dưới mặt $z = 1$, tức là:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \; x^2 + y^2 \le z \le 1\}.$$

trong đó $D$ là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$.

Áp dụng công thức Fubini và hệ tọa độ trụ, ta có:

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{1} z\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x^2+y^2}^{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{2}\left[1-(x^2+y^2)^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{0\le r\le 1,\,0\le\theta\le 2\pi} \frac{1}{2}\left[1-(r^2)^2\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^5)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$



Cách 2: Chặn của $z$ phụ thuộc vào $r$ và $\theta$.

Ta xem $E$ là một khối đơn giản theo chiều trục $z$, nằm trên mặt phẳng $z = x^2 + y^2$ và dưới mặt $z = 1$, tức là:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\},$$

trong đó $D$ là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

Miền $E$ được viết lại trong tọa độ cực:

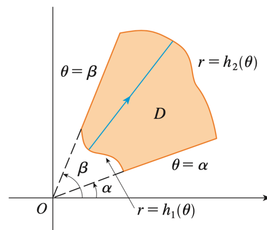
$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r^2 \leq z \leq 1\},$$

nên tích phân là:

$$\iiint_E z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 z \, \mathrm{d}z \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}.$$



# Khi $r$ phụ thuộc vào $\theta$




Hình: $D = \{(r, \theta) \,|\, \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

## Định lý

*Giả sử hàm $f(r, \theta)$ liên tục trên một miền phẳng $D$ trong tọa độ cực:*

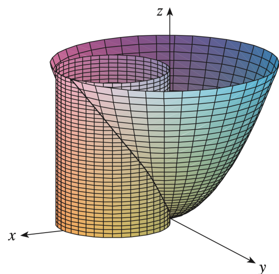
$$D = \{(r, \theta) \,|\, \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

*thì ta có đẳng thức tích phân:*

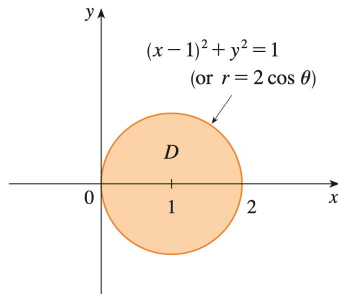
$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta.$$

# Ví dụ

*Tìm thể tích của khối $E$ nằm bên dưới đồ thị paraboloid $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt phẳng xy, và bên trong khối trụ $x^2 + y^2 = 2x$.*




(a) Khối $E$ cần tìm thể tích




(b) Miền $D$ trong mặt phẳng xy

Khối $E$ nằm bên trên miền $D$ trong mặt phẳng xy, và $D$ là một đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 2x$, nghĩa là $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Sử dụng tọa độ cực $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, phương trình $x^2 + y^2 = 2x$ trở thành:

$$r^2 = 2r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = 2\cos\theta.$$

Do đó, đĩa tròn được cho bởi

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}.$$

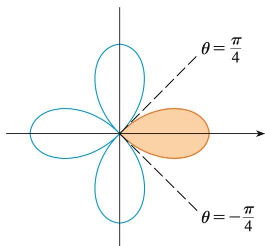
Thể tích của khối cần tính là:

$$\begin{aligned} |E| &= \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



## Ví dụ

*Sử dụng tích phân kép để tìm diện tích của một cánh hoa của một hình bông hoa 4 cánh* $r = \cos 2\theta$.




Từ hình vẽ, ta thấy miền biểu diễn cho một cánh hoa là:

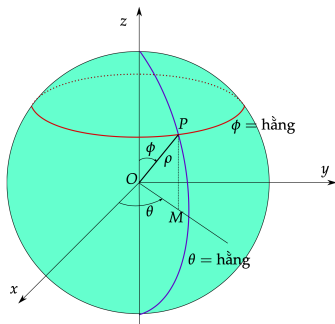
$$D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \cos 2\theta \right\}.$$

Từ đây, ta tính được diện tích một cánh hoa là:

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D 1 \, \mathrm{d}A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$



# Tọa độ cầu (spherical coordinate system)




Một điểm $P(x, y, z)$ trong $\mathbb{R}^3$ có thể được miêu tả bằng bộ ba số thực $(\rho, \phi, \theta)$, với

- $\rho$ là khoảng cách từ $O$ tới $P$,
- $\phi$ là góc giữa vectơ $(0, 0, 1)$ (tia $Oz$) và vectơ $\overrightarrow{OP}$,
- và nếu $M(x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm $P$ xuống mặt phẳng $Oxy$ thì $\theta$ là góc từ vectơ $(1, 0, 0)$ (tia $Ox$) tới vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Như vậy, ta được:

$$z = PM = \rho\cos\phi, \quad OM = \rho\sin\phi,$$
$$x = OM\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = OM\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Để có một phép đổi biến, ta phải hạn chế miền xác định bằng cách bỏ đi tập

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, x \geq 0\},$$

nghĩa là một nửa mặt phẳng $Oxz$ ứng với $\rho = 0$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Khi đó, ánh xạ

$$\begin{aligned}\varphi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0,\, x \geq 0\} \\ (\rho, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\end{aligned}$$

là một song ánh có ma trận Jacobi:

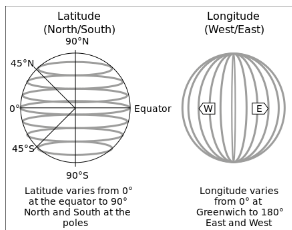
$$\det J_\varphi(\rho, \phi, \theta) = \det \begin{pmatrix} \sin\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \cos\theta & -\rho \sin\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \rho \cos\phi \sin\theta & \rho \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi & -\rho \sin\phi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin\phi > 0,$$

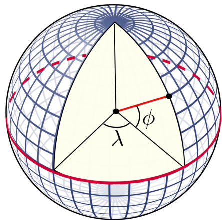
nên là một phép đổi biến (vi đồng phôi).

# Ghi chú

Một cách hình thức, ta có thể nhớ rằng:

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$




Tọa độ cầu $(\rho, \phi, \theta)$ được giới thiệu ở đây cũng được sử dụng trong vật lý với cùng một thứ tự của các biến (chuẩn ISO 80000-2:2019).

Để xác định tọa độ một điểm trên Trái Đất, người ta sử dụng hệ tọa độ địa lý (geographic coordinate system GCS) với các góc $\phi$ và $\lambda$ tượng trưng cho vĩ độ (latitude) và kinh độ (longitude). Đồng thời, cao độ cũng được sử dụng để chỉ độ cao so với mực nước biển trung bình.

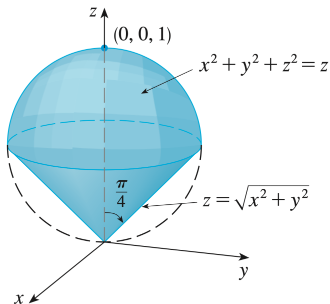
# Ví dụ - Thể tích quả cầu

Gọi $B(O,R)$ là quả cầu mở tâm $O$ bán kính $R$ trong $\mathbb{R}^3$. Thể tích của quả cầu này là

$$|B(O,R)| = \iiint\limits_{B(O,R)} 1 \, \mathrm{d}V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \square$$

# Ví dụ

*Sử dụng tọa độ cầu, tính thể tích của khối $E$ nằm phía trên mặt trong của hình nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.*




Phương trình hình nón trong tọa độ cầu là:

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} \Leftrightarrow \cos \phi = \sin \phi$$
$$\Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Phương trình mặt cầu trong tọa độ cầu là:

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \Leftrightarrow \rho = \cos \phi.$$

Do đó, khối $E$ được miêu tả bởi:

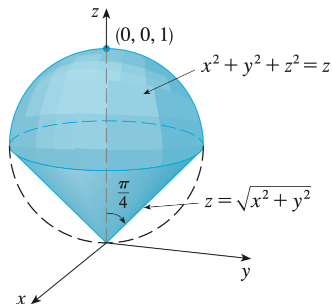
$$E = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq \cos\phi \right\},$$

và thể tích cần tìm là:

$$|E| = \iiint\limits_E \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}.$$



## Cách khác: tọa độ trụ




Phương trình nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$ được viết lại:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}.$$

Giao điểm của hai mặt cong này thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Vì vậy, miền $E$ là:

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\},$$

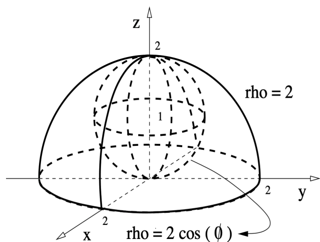
trong đó $D$ là hình tròn $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$ tại $z = \frac{1}{2}$.

Do đó, sử dụng tọa độ cực, ta tính thể tích của $E$:

$$\begin{aligned}
|E| &= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{4}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}A \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{4}} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - r^2} - r \right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

# Ví dụ

*Tìm thể tích của miền $E \subset \mathbb{R}^3$ nằm bên trên mặt phẳng xy, ở giữa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.*




Sử dụng hệ tọa độ cầu $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, phương trình của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ trở thành $\rho^2 = 2\rho\cos\phi$, hay $\rho = 2\cos\phi$.

Tương tự, phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ trở thành $\rho = 2$.

Miền $E$ trong hệ tọa độ cầu được miêu tả bởi

$$E = \left\{ (r, \phi, \theta) \,\middle|\, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, 2\cos(\phi) \le \rho \le 2 \right\},$$

nên thể tích của miền $E$ là:

$$|E| = \iiint_E \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{2\cos\phi}^{2} \rho^2 \sin(\phi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta = 4\pi.$$



# Một số phép đổi biến khác

Ví dụ: Diện tích hình bầu dục (ellipse)

*Một hình ellipse $D$ trong mặt phẳng là tập hợp các điểm thỏa*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1,$$

*trong đó $a, b > 0$. Tính diện tích của miền $D$.*

Sử dụng phép đổi biến:

$$u = \frac{x-x_0}{a}, \qquad v = \frac{y-y_0}{b},$$

phương trình hình ellipse trở thành hình tròn $u^2 + v^2 \leq 1$.

Đây chẳng qua là một phép tịnh tiến tâm hình ellipse về gốc tọa độ rồi hợp với một phép co giãn (vị tự) trục tọa độ biến hình ellipse thành hình tròn.

Ta tính

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab > 0,$$

nên đây là một phép đổi biến. Ta cũng có $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Do đó, diện tích hình ellipse là:

$$|D| = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{u^2+v^2\leq 1} 1\cdot ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab \iint\limits_{u^2+v^2\leq 1} 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab\pi,$$

vì diện tích hình tròn tâm O bán kính 1 là $\pi$. 

Ghi chú: Ta có thể dùng phép đổi biến

$$\frac{x - x_0}{a} = r\cos(\theta) \qquad \text{và} \qquad \frac{y - y_0}{b} = r\sin(\theta)$$

với $0 < r < 1$ và $0 < \theta < 2\pi$:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -ar\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & br\cos(\theta) \end{pmatrix} = abr.$$

Như vậy, diện tích hình ellipse là:

$$|D| = \iint_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = ab\pi.$$

Kết quả này bằng với kết quả trong cách trước.

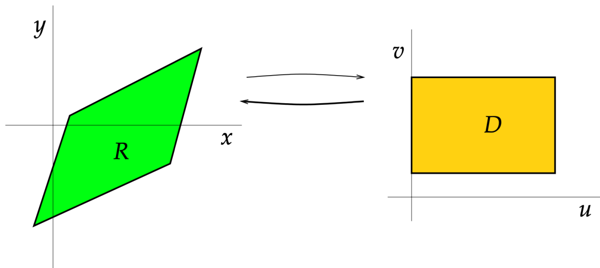
## Ví dụ

*Tính*

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,\mathrm{d}A,$$

*trong đó* $R$ *là hình bình hành bao bởi các đường thẳng* $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, *và* $3x-y=8$.

Đặt $u=x-2y$ và $v=3x-y$. Như vậy, hình bình hành $R$ trở thành hình chữ nhật $D$ với các cạnh: $u=0$, $u=4$, $v=1$, $v=8$, nghĩa là $D=[0,4]\times[1,8]$ trong mặt phẳng $(u,v)$.



Ta tính ma trận Jacobi:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0,$$

nên ánh xạ $(x,y) \to (u,v)$ là một phép đổi biến từ phần trong của $D$ sang phần trong của $R$.

Biên của $D$ và $R$ không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục.

Vì $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{5}$, nên công thức đổi biến cho

$$\begin{aligned} \iint\limits_R \frac{x-2y}{3x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^4 \int_1^8 \frac{u}{v}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{8}{5}\ln 8. \end{aligned}$$



# Ví dụ

*Xét khối bầu dục E được bao bởi mặt có phương trình* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$*. Hãy tính thể tích của E bằng cách đổi biến để đưa về thể tích của quả cầu.*

Đặt $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y\sqrt{2} = \rho \sin\phi \sin\theta$, và $z\sqrt{3} = \rho \cos\phi$. Khi đó, phương trình của mặt trong hệ tọa độ cầu $(\rho, \phi, \theta)$ là

$$\rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2.$$

Khối $E$ dưới phép đổi biến này trở thành quả cầu tâm O, bán kính 2.

Ngoài ra, ma trận Jacobi là:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\phi\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\phi\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\phi & -\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\phi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\phi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin^2\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\rho^2\sin\phi.
\end{aligned}
$$

Do đó, thể tích của khối bầu dục là:

$$\begin{aligned}|E| &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{2}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{8}{3}\\ &= \frac{16\pi\sqrt{6}}{9}. \quad \square\end{aligned}$$

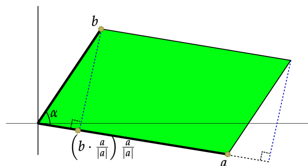
Ghi chú: Thể tích của khối bầu dục (ellipsoid) có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

có thể tích là $\frac{4}{3}\pi abc$.

# Thể tích và định thức

Ví dụ: Diện tích hình bình hành (parallelogram) trong $\mathbb{R}^2$




Trong $\mathbb{R}^2$ thì hình bình hành được sinh ra từ hai vectơ $a = (a_1, a_2)$ và $b = (b_1, b_2)$.

Ta tính diện tích của hình bằng tích của chiều dài cạnh đáy và chiều cao.

Chiều cao là $|b| \sin(\alpha)$ với

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)^2} = \frac{\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}}{|a||b|},$$

Vì vậy, diện tích cần tính là:

$$A = |a||b| \cdot \frac{\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}}{|a||b|} = \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}.$$

Một cách khác để tính diện tích hình bình hành là

$$A = |a||b|\sin(\alpha) = |a||b|\frac{\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}}{|a||b|} = \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}.$$

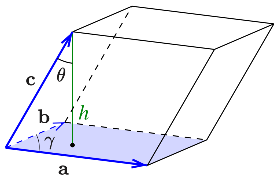
Khai triển và thu gọn biểu thức $A$:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\
&= |a_1b_2 - a_2b_1| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| \\
&= |\det(a, b)|.
\end{aligned}$$

Vậy diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ $a$ và $b$ đúng bằng $|\det(a, b)|$. □

## Ví dụ: Thể tích khối bình hành (parallelepiped) trong $\mathbb{R}^3$

Trong $\mathbb{R}^3$, ta tính thể tích khối bình hành được tạo thành bởi 3 vectơ $a$, $b$, $c$.




Đặt $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$. Thể tích của khối bình hành được tính bằng diện tích đáy nhân chiều cao (đoạn $h$), với diện tích đáy là tích có hướng của hai vectơ $a$ và $b$.

$$\begin{aligned}
V &= |(a \times b)h| = |(a \times b)c\cos\theta| \\
&= |(a \times b) \cdot c| \\
&= |(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c| \\
&= |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= |\det(a, b, c)|.
\end{aligned}$$



Các công thức trong hai ví dụ trên, vốn dựa trên hình học Euclid, bây giờ có thể được coi như là những trường hợp riêng của công thức tổng quát tính thể tích hình bình hành bằng định thức.

## Mệnh đề

*Thể tích của hình bình hành sinh bởi n vectơ* $v_1, \ldots, v_n$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *bằng* $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$.

Điều này có nghĩa là: *giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận chính là thể tích của hình bình hành sinh bởi các vectơ cột của ma trận.*

## Chứng minh

Xét phép đổi biến tuyến tính cho bởi $T(e_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$. Cho $T$ tác động lên hình hộp $(0,1)^n$. Vì $T$ là tuyến tính nên

$$T((0,1)^n) = \left\{ T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, 0 < \alpha_i < 1 \right\}$$

chính là hình bình hành mở sinh bởi các vectơ $v_i$.

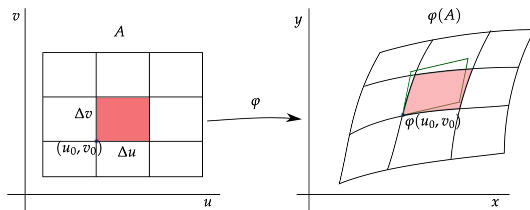
Ta xem $T$ như phép đổi biến và áp dụng công thức đổi biến để có:

$$|T((0,1)^n)| = \int_{T((0,1)^n)} 1 = \int_{(0,1)^n} 1 \circ T \cdot |\det T'| = |\det T|$$

bởi vì $T$ tuyến tính dẫn đến $T'(x) = T$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính $T$ chính là ma trận các tọa độ của các vectơ $v_i$. $\square$

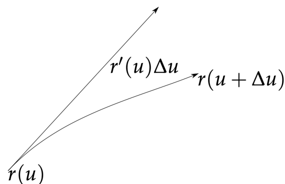
# Giải thích công thức đổi biến




Để đơn giản, ta xét trường hợp $A$ là một hình chữ nhật. Ánh xạ $\varphi$ mang miền $A$ trên mặt phẳng $(u, v)$ sang miền $\varphi(A)$ trên mặt phẳng $(x, y)$.

Xét một phép chia $A$ thành những hình chữ nhật con. Ta xem tác động của $\varphi$ lên hình chữ nhật con đại diện $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ có diện tích $\Delta u \cdot \Delta v$.

Hàm trơn $\varphi$ mang mỗi cạnh của hình chữ nhật này thành một đoạn cong trên mặt phẳng $(x, y)$, và ta được một "hình chữ nhật cong" trên mặt phẳng $(x, y)$ với đỉnh là điểm $\varphi(u_0, v_0)$.




Hình: Xấp xỉ tuyến tính đường cong, với đường $r(u) = \varphi(u, v)$ (với $v$ cố định): $r(u+\Delta u) - r(u) \approx r'(u)\Delta u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)\Delta u$

Ta tính diện tích của hình chữ nhật cong này bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Đoạn cong từ $\varphi(u_0, v_0)$ đến $\varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$ sẽ được xấp xỉ tuyến tính bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại $\varphi(u_0, v_0)$.

Vì vectơ tiếp xúc chính là $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ nên đoạn tiếp tuyến này cho bởi vectơ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$.

Tương tự, đoạn cong $\varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$ được xấp xỉ bởi vectơ tiếp xúc $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$.

Như vậy, hình chữ nhật cong trong mặt phẳng $(xy)$ được xấp xỉ bởi hình bình hành sinh bởi hai vectơ tiếp xúc trên.

Diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$ và $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$ là:

$$\begin{aligned}
&\left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v\right)\right| \\
&= \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)\right| \Delta u\Delta v \\
&= \left|\det J_\varphi(u_0, v_0)\right| \Delta u\Delta v.
\end{aligned}$$

Điều này giải thích sự xuất hiện của dấu giá trị tuyệt đối trong công thức đổi biến.

# Thể tích khối tròn xoay trong tọa độ cực

Định lý

*Cho miền $D$ bị chặn bởi những đường cong trong tọa độ cực $r = f(\theta)$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$. Khi đó, thể tích của khối $E$ nhận được bằng cách xoay $D$ quanh các trục $(L)$ là:*

(a) $|E| = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ *nếu* $(L) : \theta = 0$ *(trục $Ox$).*

(b) $|E| = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \cos(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ *nếu* $(L) : \theta = \frac{\pi}{2}$ *(trục $Oy$).*

(c) $|E| = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin(\theta - \gamma)\, \mathrm{d}\theta$ *nếu* $(L) : \theta = \gamma$.

## Ví dụ

*Tìm thể tích của khối nhận được bằng cách xoay miền phẳng $D$ quanh trục $Ox$, biết rằng $D$ bị chặn bởi đường cong kín $r = 4\cos(\theta)$.*

Ta viết $r = 4\cos(\theta) \Leftrightarrow r^2 = 4r\cos(\theta)$, nghĩa là:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Đường cong đã cho là một đường tròn tâm tại $(2, 0)$, bán kính 2.

Ta giải phương trình $r = 0$ để xác định chu kỳ:

$$4\cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy, chu kỳ là $\pi$. Áp dụng công thức để tính thể tích:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi}{3} (4\cos(\theta))^3 \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

